CAPITOLO 10

SPAZI PROIETTIVI E AFFINI

In questo capitolo, utilizzando gli strumenti algebrici degli spazi vettoriali, si introducono gli spazi proiettivi e gli spazi affini e la geometria dei loro sottospazi. Viene anche presentato il concetto di spazio euclideo come spazio affine sul quale è definita una distanza.

10.1 Spazi proiettivi

Definizione 10.1.1 (punto proiettivo. spazio proiettivo). Sia $V^{n+1}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Un *punto proiettivo* P è un sottospazio 1-dimensionale di $V^{n+1}(\mathbb{K})$. La totalità dei punti si chiama *spazio proiettivo n-dimensionale* su $\mathbb{K}$, e si indica con $P^n(\mathbb{K})$, o brevemente $\mathbb{P}^n$.

Identificando $V^{n+1}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^{n+1}$, ogni punto può quindi essere visto come l'insieme delle soluzioni non nulle di un sistema lineare omogeneo in $n+1$ incognite, di rango n, sul campo $\mathbb{K}$.

Va notato che ogni punto P può essere rappresentato da una qualunque delle soluzioni non nulle $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ che lo costituiscono. Ogni altra soluzione è proporzionale a $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Così, le x_i vengono dette *coordinate proiettive omogenee* del punto proiettivo P: ciò è in accordo con la definizione che verrà data tra poco.

Essendo le coordinate proiettive definite a meno di un fattore di proporzionalità, affermare che le coordinate di un punto verificano un'equazione può avere senso oppure no a seconda dei casi. Per esempio, l'equazione $x + y + u = 0$ (omogenea!) ha senso, la $x + y + 1 = 0$ no: infatti un punto le cui coordinate proiettive verificano la seconda equazione può, con diversa scelta di coordinate, non verificarla.

È tuttavia possibile rappresentare i punti mediante coordinate, anche senza ricorrere all'identificazione di V con $\mathbb{K}^{n+1}$.

Siano $P_i = \langle v_i \rangle$, $i = 1, \ldots, k$, e siano $a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Se i v_i sono linearmente indipendenti, lo sono anche gli $a_i v_i$ (e viceversa). Infatti da